

MATEMATIKA 2

Lekcija 9- Jednačine totalnog diferencijala

Jednačina

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad (1)$$

naziva se jednačina totalnog diferencijala ako je leva strana totalni diferencijal neke funkcije $u(x, y)$ dveju nezavisno promenljivih x i y , tj.

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy.$$

Ako je tako, onda je $u(x, y) = C$ opšte rešenje jednačine (1).

Teorema. Pretpostavimo da funkcije $M(x, y)$ i $N(x, y)$ imaju neprekidne parcijalne izvode po y i x , respektivno, u nekoj prostopovezanoj oblasti D xy -ravni. Potreban i dovoljan uslov da leva strana jednačine (1) bude totalni diferencijal neke funkcije $u(x, y)$ dveju nezavisno promenljivih x i y , jeste da važi jednakost

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad (2)$$

u svakoj tački oblasti D .

Napomena. Ako je za funkcije $M(x, y)$ i $N(x, y)$ ispunjeno (2), onda je

$$u(x, y) = C$$

opšte rešenje jednačine (1), gde je C proizvoljna konstanta, a funkcija $u(x, y)$ se nalazi po formuli

$$u(x, y) = \int M(x, y) dx + \int \left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx \right] dy. \quad (3)$$

Primer 1. Proverimo da li je jednačina

$$e^{-y} dx - (2y + xe^{-y}) dy = 0 \quad (4)$$

jednačina totalnog diferencijala, i nađimo njeno opšte rešenje.

Rešenje. Ovde je $M(x, y) = e^{-y}$ i $N(x, y) = -(2y + xe^{-y})$, pa je

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -e^{-y}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -e^{-y}, \quad \text{dakle} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

tj., (4) je jednačina totalnog diferencijala. Prema formuli (3), nalazimo

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int e^{-y} dx + \int \left[-(2y + xe^{-y}) - \frac{\partial}{\partial y} \int e^{-y} dx \right] dy \\ &= e^{-y}x + \int \left[-(2y + xe^{-y}) - \frac{\partial}{\partial y} (xe^{-y}) \right] dy \\ &= e^{-y}x + \int (-2y - xe^{-y} + xe^{-y}) dy \\ &= e^{-y}x - y^2. \end{aligned}$$

Znači, $e^{-y}x - y^2 = C$ je opšte rešenje jednačine (4).

Primer 2. Dokažimo da je jednačina sa razdvojenim promenljivima jednačina totalnog diferencijala.

Rešenje. Neka je $P(x) dx = Q(y) dy$ jednačina sa razdvojenim promenljivima. Ona je ekvivalentna jednačini

$$P(x) dx + [-Q(y)] dy = 0, \quad (5)$$

a to je jedna jednačina oblika (1). ($M(x, y) = P(x)$, $N(x, y) = -Q(y)$.) Kako je

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial (-Q)}{\partial x} = 0,$$

to je $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, odakle, prema Teoremi, sledi da je leva strana jednačine (5) totalni diferencijal funkcije u dveju nezavisno promenljivih x i y .

Integracioni množilac. Ako jednačina (1) nije jednačina totalnog diferencijala, tada je moguće potražiti funkciju $\lambda(x, y)$ tako da jednačina

$$\lambda(x, y) M(x, y) dx + \lambda(x, y) N(x, y) dy = 0$$

bude jednačina totalnog diferencijala. Takva funkcija se zove integracioni faktor ili integracioni množilac. Prema Teoremi, uslov za to je

$$\frac{\partial(\lambda M)}{\partial y} = \frac{\partial(\lambda N)}{\partial x}$$

ili, u razvijenom obliku,

$$M \frac{\partial \lambda}{\partial y} - N \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \lambda = 0. \quad (6)$$

Znači, ako je funkcija λ integracioni množilac diferencijalne jednačine (1) tada ta funkcija zadovoljava parcijalnu diferencijalnu jednačinu (6). Lako je

videti da važi i obrnuto. Time se problem rešavanja jednačine (1) svodi na rešavanje parcijalne diferencijalne jednačine (6). Međutim, u opštem slučaju teže je rešiti jednačinu (6) nego jednačinu (1). Zato se najčešće postupa tako što se pokušava odrediti funkcija λ u nekom specijalnom obliku, na primer, $\lambda = \lambda(x)$, $\lambda = \lambda(y)$ ili $\lambda = \lambda(xy)$.

Potražimo integracioni množilac u obliku $\lambda = \lambda(\mu)$, gde je $\mu = \mu(x, y)$ poznata funkcija. Jednačina (6) tako postaje

$$\left(M \frac{\partial \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) \lambda'(\mu) + \left[\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \lambda(\mu) \right] = 0$$

ili

$$\frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{d\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M \frac{\partial \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \mu}{\partial x}}. \quad (7)$$

Ako se funkcija na desnoj strani jednačine (7) može prikazati kao funkcija promenljive μ , tj., ako je

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M \frac{\partial \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \mu}{\partial x}} = G(\mu),$$

onda jednačina (7) predstavlja običnu diferencijalnu jednačinu prvog reda u odnosu na nepoznatu funkciju $\lambda = \lambda(\mu)$, koja razdvaja promenljive i čiji je oblik

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = G(\mu) d\mu.$$

Jedno rešenje te jednačine je funkcija $\lambda(\mu) = e^{\int G(\mu) d\mu}$.

Specijalno, diferencijalna jednačina (1) ima integracioni faktor koji zavisi samo od promenljive x ($\mu(x, y) = x$), odnosno samo od promenljive y ($\mu(x, y) = y$), ako postoji funkcija G jedne nezavisno promenljive, takva da važi jednakost

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = G(x),$$

(i tada je $\lambda(x) = e^{\int G(x) dx}$), odnosno takva da važi jednakost

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = G(y),$$

(i tada je $\lambda(y) = e^{\int G(y) dy}$).

Ortogonalne i izogonalne trajektorije. U nekim primenama često se javlja sledeći problem: ako je data familija krivih $\Phi(x, y, C) = 0$ u xy -ravni,

naći drugu familiju krivih $\Psi(x, y, C) = 0$, tako da svaka kriva te familije seče krive familije $\Phi(x, y, C) = 0$ pod pravim uglom. Tada se familija krivih $\Psi(x, y, C) = 0$ zove familija ortogonalnih trajektorija familije $\Phi(x, y, C) = 0$.

Analitički, to znači sledeće. Ako je $F(x, y, y') = 0$ diferencijalna jednačina familije krivih $\Phi(x, y, C) = 0$, onda diferencijalna jednačina ortogonalnih trajektorija te familije ima oblik

$$F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0,$$

jer uslov normalnosti tangenti sa koeficijentima pravca k_1 i k_2 glasi: $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Da zaključimo: ako želimo da nađemo ortogonalne trajektorije familije $\Phi(x, y, C) = 0$, najpre nađemo njenu diferencijalnu jednačinu $F(x, y, y') = 0$ i u njoj y' zamenimo sa $-\frac{1}{y'}$. Integraljenjem tako dobijene diferencijalne jednačine

$$F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0,$$

dobijamo familiju ortogonalnih trajektorija familije $\Phi(x, y, C) = 0$.

Primer 3. Nađimo ortogonalne trajektorije familije krugova sa centrom u koordinatnom početku:

$$x^2 + y^2 = C. \quad (8)$$

Rešenje. Najpre nađimo diferencijalnu jednačinu familije krugova. Diferenciranjem jednačine (8) dobijamo

$$2x + 2yy' = 0, \quad \text{tj.} \quad y' = -\frac{x}{y}.$$

To je diferencijalna jednačina familije krugova. Ako u toj jednačini y' zamenimo sa $-\frac{1}{y'}$, dobijemo

$$-\frac{1}{y'} = -\frac{x}{y}, \quad \text{odnosno} \quad y' = \frac{y}{x},$$

što je diferencijalna jednačina tražene familije ortogonalnih trajektorija. Njenim rešavanjem, nalazimo

$$y = Cx \quad (x \neq 0).$$

Ovo je familija ortogonalnih trajektorija familije (8).

Familija krivih $\Psi(x, y, C) = 0$ zove se familija izogonalnih trajektorija pod uglom α familije $\Phi(x, y, C) = 0$, ako svaka kriva te familije seče krive familije $\Phi(x, y, C) = 0$ pod uglom $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$.

Ugao između ma koje krive L_C iz familije $\Phi(x, y, C) = 0$ i neke izogonalne trajektorije L u njihovoj presečnoj tački M smatra se orijentisanim od tangente krive L_C ka tangenti krive L , a merni broj α ugla α je takav da je $0 < |\alpha| < \frac{\pi}{2}$. Na taj način se dobija

$$\alpha + \varphi_1 = \varphi_2, \quad \varphi_1 = \varphi_2 - \alpha, \quad \tan \varphi_1 = \frac{\tan \varphi_2 - \tan \alpha}{1 + \tan \varphi_2 \tan \alpha}, \quad k_1 = \frac{k_2 - k}{1 + k k_2},$$

tako da diferencijalna jednačina izogonalnih trajektorija glasi $F\left(x, y, \frac{y'-k}{1+ky'}\right) = 0$.

Primer 4. Nađimo izogonalne trajektorije pod uglom $\alpha = \frac{\pi}{4}$ familije krugova

$$x^2 + y^2 = C.$$

Rešenje. Ako u diferencijalnoj jednačini $x + yy' = 0$ familije krugova, y' zamenimo sa $\frac{y'-1}{1+y'}$ (jer je $\tan \frac{\pi}{4} = 1$), dobijemo diferencijalnu jednačinu $y' = \frac{y-x}{y+x}$. To je diferencijalna jednačina familije izogonalnih trajektorija pod uglom $\frac{\pi}{4}$ datih krugova. Nije teško videti da je to jedna homogena diiferencijalna jednačina prvog reda i da je njeno opšte rešenje:

$$\ln \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \arctan \frac{y}{x} = C.$$